

Konstruktionen in Jahrgangsstufe 7

Die elementaren Grundkonstruktionen und ihre Anwendung in der Dreiecks- und Viereckslehre in Jahrgangsstufe 7 sind wegen ihrer kulturhistorischen Bedeutung nach wie vor Inhalt des Mathematikunterrichts am Gymnasium. Gerade vor dem Hintergrund der begrenzten Zeichengenauigkeit, des vielfach höheren Exaktheitsgrads ohne Zirkelverwendung und der Möglichkeiten, die moderne technische Hilfsmittel bieten, ist ihr Stellenwert jedoch zu relativieren. Keinesfalls wird allerdings die Bedeutung geometrischer Konstruktionen im Hinblick auf die zielgerichtete Planung und schrittweise Entwicklung einer Figur aus vorgegebenen Grundbausteinen in Frage gestellt.

Die neuen technischen Hilfsmittel und die daraus resultierenden Möglichkeiten sind vor dem Hintergrund der im Fachprofil formulierten fachspezifischen Bildungsziele zu bewerten und entsprechend einzusetzen. So erlaubt der Einsatz dynamischer Geometriesoftware neue methodische Varianten, ersetzt aber nicht die Forderung an die Schüler nach der prinzipiellen Fähigkeit zur Durchführung einer Konstruktion mit Zirkel und Lineal. Als Anhaltspunkt für den Umfang der gewünschten Fähigkeiten können die in M 7.1.1 genannten Grundkonstruktionen (Mittelsenkrechte, Lot, Winkelhalbierende, symmetrische Punkte) dienen.

Im neuen Lehrplan liegt insbesondere die Verwendung der Strecken- bzw. Winkelübertragung mit dem Zirkel in der methodischen Freiheit der einzelnen Lehrkraft bzw. Fachschaft. Auch ist es insbesondere im Rahmen komplexerer Konstruktionen nicht unbedingt notwendig, Teilstücke, wie z. B. eine Parallele in einem bestimmten Abstand, konstruieren zu lassen (vgl. Aufgabe 1 (3) zu M 7.5.3); hier genügt ein Einzeichnen mit Hilfe des Geodreiecks.

Bei der Konstruktionsbeschreibung bzw. beim Konstruktionsplan werden die allgemeinen mathematischen Kompetenzen „Argumentieren“ und „Kommunizieren“ sowie nachrangig auch die Kompetenz „Mit symbolischen, formalen und technischen Elementen der Mathematik umgehen“ gefordert. Als Hilfe müssen den Schülern Formulierungsbausteine an die Hand gegeben werden. Hierbei hat sich die Verwendung halbformaler Strukturen bewährt, wie etwa „B liegt auf dem Kreis um A mit Radius ... und dem freien Schenkel des Winkels ...“. Die Mengenschreibweise, die erst in Jahrgangsstufe 8 vom Lehrplan gefordert wird, kann in der Regel nicht vorausgesetzt werden. Wenn überhaupt, so bietet sich eine moderate Verwendung symbolischer Schreibweisen an, z. B. $k(M, r = 2 \text{ cm})$ zur Beschreibung eines Kreises. Ausschließliche Verwendung der Mengensymbolik, wie etwa $k(M, r = 4 \text{ cm}) \cap [AB] = \{C_1, C_2\}$, wird vom Lehrplan nicht gefordert.

Weitere Erläuterungen geordnet nach Lehrplankapitel:

- [M 7.5.1 Kongruenz](#)
- [M 7.5.2 Besondere Dreiecke](#)
- [M 7.5.3 Konstruktionen](#)

M 7.5.1 Kongruenz

Ausgehend von den Kongruenzsätzen führen die Schüler elementare Konstruktionen zur Grundfigur Dreieck durch.

In diesem Zusammenhang bietet sich eine exemplarische Reflexion einzelner Konstruktionen im Hinblick auf die Innenwinkelsumme für Dreiecke, auf die allgemeine Seiten-Winkel-Beziehung und im Hinblick auf die Dreiecksungleichung an. Der Lehrplan verlangt keine gesonderte Thematisierung und Begründung der beiden letztgenannten fundamentalen und offensichtlichen Zusammenhänge.

Beispielaufgaben:

Die folgenden Aufgaben spiegeln ein Niveau wider, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch weitere Aufgaben, die von diesem Niveau abweichen, von den Schülern bearbeitet werden.

Aufgabe 1:

Konstruiere jeweils ein Dreieck ABC aus folgenden Stücken:

- | | | | |
|-----|----------------------|----------------------|---------------------|
| (1) | $a = 4 \text{ cm}$ | $b = 5 \text{ cm}$ | $c = 7 \text{ cm}$ |
| (2) | $a = 6,5 \text{ cm}$ | $\gamma = 45^\circ$ | $\beta = 75^\circ$ |
| (3) | $b = 4 \text{ cm}$ | $\alpha = 35^\circ$ | $\beta = 55^\circ$ |
| (4) | $a = 6 \text{ cm}$ | $c = 3,5 \text{ cm}$ | $\beta = 80^\circ$ |
| (5) | $b = 3 \text{ cm}$ | $c = 7 \text{ cm}$ | $\gamma = 50^\circ$ |

Aufgabe 2:

a) Überlege anhand einer Planfigur, ob die Dreiecke ABC aus folgenden Angaben jeweils eindeutig konstruierbar sind. Begründe deine Antwort kurz.

- | | | | |
|-----|--------------------|----------------------|--------------------|
| (1) | $c = 7 \text{ cm}$ | $\alpha = 104^\circ$ | $\beta = 77^\circ$ |
| (2) | $a = 7 \text{ cm}$ | $b = 17 \text{ cm}$ | $c = 9 \text{ cm}$ |
| (3) | $a = 9 \text{ cm}$ | $b = 7 \text{ cm}$ | $\beta = 90^\circ$ |
| (4) | $a = 7 \text{ cm}$ | $\alpha = 60^\circ$ | $c = 5 \text{ cm}$ |

b) Ändere ggf. jeweils eine der vorgegebenen Seitenlängen oder Winkelgrößen so ab, dass das Dreieck eindeutig konstruierbar ist, und führe die Konstruktion aus.

[Kommentar: Es bietet sich an, die von den Schülern vorgeschlagenen Lösungsmöglichkeiten im Unterrichtsgespräch einander gegenüberzustellen.]

M 7.5.2 Besondere Dreiecke

Die Schülerinnen und Schüler werden laut Lehrplan elementare Konstruktionen der dort genannten Dreiecks Sonderformen anfertigen.

Kein Inhalt des neuen Lehrplans sind ~~Tangentenvierecke~~; diese können allenfalls im Rahmen einzelner Aufgaben oder im Sinne einer Differenzierung und Individualisierung z. B. in Intensivierungsstunden angesprochen werden.

Beispielaufgaben:

Die Aufgaben 1, 2 und 3b spiegeln ein Niveau wider, das erreicht und gehalten werden soll. Unter dem Aspekt der Differenzierung werden jedoch auch weitergehende Aufgaben (wie etwa Aufgabe 3a) von den Schülern bearbeitet werden.

Aufgabe 1:

Konstruiere ein gleichschenkliges Dreieck

- mit der Basislänge 6,5 cm und der Schenkellänge 5 cm,
- bei dem die Schenkel einen Winkel von 55° einschließen und 7 cm lang sind,
- mit einem Basiswinkel von 65° und der Basislänge 4,5 cm.

Begründe jeweils die Eindeutigkeit der Konstruktion mit Hilfe eines Kongruenzsatzes.

[Kommentar: Bei der Bearbeitung dieser Aufgabe bietet es sich an, den Zusammenhang zwischen der Spezialisierung der Dreiecksform und der zur eindeutigen Konstruierbarkeit jeweils nötigen Mindestanzahl gegebener Stücke zu erörtern.]

Aufgabe 2:

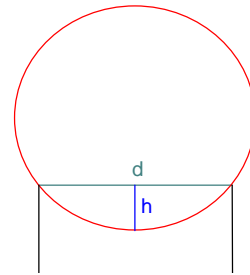
Konstruiere ein rechtwinkliges Dreieck ABC mit der Hypotenuse $\overline{BC} = 6$ cm und der Kathete $\overline{AC} = 4$ cm.

[Kommentar: Die Konstruktion kann mit oder ohne Thaleskreis durchgeführt werden.]

Aufgabe 3:

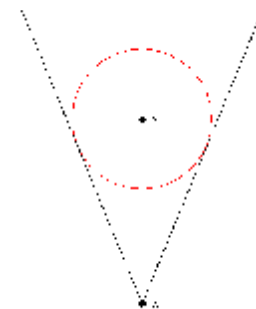
- a) Eine Kugel liegt in der Öffnung eines Zylinders mit Radius 2 cm und taucht $h = 1$ cm ein.

Ermittle den Kugelradius durch Konstruktion.



- b) Eine Kugel mit $r = 2,5$ cm liegt in einem Kegel, wobei der tiefste Punkt der Kugel von der Kegelspitze 4 cm entfernt ist.

Ermittle den Öffnungswinkel des Kegels konstruktiv.



M 7.5.3 Konstruktionen

Bei Konstruktionen steht die gedankliche Durchdringung, d. h. die zielgerichtete Planung und schrittweise Entwicklung einer Figur aus vorgegebenen Grundbausteinen im Vordergrund. Insbesondere im Rahmen komplexerer Konstruktionen ist es nicht unbedingt nötig, Teilstücke, wie z. B. eine Parallele in einem bestimmten Abstand, konstruieren zu lassen (vgl. Aufgabe 1 (3)); hier genügt ein Einzeichnen mit Hilfe des Geodreiecks.

Der Begriff *Höhe* ist den Schülerinnen und Schülern bereits aus Jahrgangsstufe 6 im Zusammenhang mit der Bestimmung von Flächeninhalten bei Dreiecken (Kapitel M 6.3.1) vertraut. Diese Begriffsbildung wird in Jahrgangsstufe 7 erweitert, da nunmehr insbesondere auch Dreiecke betrachtet werden, deren Höhenfußpunkte außerhalb einer Dreiecksseite liegen.

Die *Mittelsenkrechte* einer Strecke wurde bereits in Kapitel M 7.1.1. bei den Betrachtungen zur Symmetrieachse eingeführt, ebenso wie die *Winkelhalbierende* eines Winkels als (Halb-) Gerade. Neu wird in der Regel die Verwendung des Begriffs Winkelhalbierende für eine Strecke innerhalb des Dreiecks sein.

Der Lehrplan fordert keine Behandlung der ~~Seitenhalbierenden~~ und des ~~Schwerpunkts~~, des ~~Inkreises~~ sowie der ~~Sehnenvierecke~~. Aspekte zu diesen Inhalten könnten jedoch im Sinne einer individuellen Differenzierung – gebunden an einzelne Aufgaben – behandelt werden.

Gemäß Lehrplan sollen die Schülerinnen und Schüler Dreiecke und Vierecke konstruieren. Diese Konstruktionen erwachsen dabei einerseits aus den im Lehrplan explizit geforderten Sachzusammenhängen und andererseits – über das im Lehrplankapitel M 7.5.1 geforderte grundlegende Niveau hinausgehend – auch aus innermathematischen Betrachtungen, z. B. zu Transversalen im Dreieck.

Beispielaufgaben:

Aufgabe 1 bietet eine Auswahl möglicher Konstruktionsaufgaben an. Diese Aufgaben spiegeln ein Niveau wider, das erreicht und gehalten werden soll. Im Sinne des Lehrplans sind durchaus weitere Aufgaben dieses Typs möglich. Eine genaue Zuordnung hinsichtlich des Anforderungsniveaus lässt sich nicht pauschal durchführen, da dies stark vom Unterricht im Vorfeld abhängt.

Aufgabe 2 illustriert die Konstruktion von Dreiecken aus einem Sachzusammenhang heraus. Diese Aufgabe spiegelt ein Niveau wider, das erreicht und gehalten werden soll.

Die im Fachprofil Mathematik geforderte Entwicklung des räumlichen Vorstellungsvermögens mahnt raumgeometrische Aufgaben in jeder Jahrgangsstufe an. **Aufgabe 3** und **4** sind Beispiele zur Einbindung raumgeometrischer Aspekte in Jahrgangsstufe 7. Es bietet sich an, diese Aufgaben unter Führung des Lehrers etwa im Rahmen von Intensivierungsstunden zu bearbeiten.

Aufgabe 1:

Konstruiere jeweils das Dreieck ABC bzw. das Viereck ABCD:

Dreiecke: (1) $b = 6 \text{ cm}$ $\gamma = 50^\circ$ $w_\gamma = 5 \text{ cm}$

(2) $b = 6 \text{ cm}$ $\alpha = 50^\circ$ $w_\gamma = 5 \text{ cm}$

(3) $c = 7 \text{ cm}$ $h_c = 4 \text{ cm}$ $\beta = 80^\circ$

[Kommentar: Die erforderliche Parallele zur Seite c kann vom Schüler mit dem Geodreieck gezeichnet werden.]

(4) $a = 9 \text{ cm}$ $h_b = 5 \text{ cm}$ $c = 8 \text{ cm}$

[Kommentar: Diese Aufgabe vernetzt mit dem vorher behandelten Thaleskreis.]

(5) $a = 6 \text{ cm}$ $\beta = 65^\circ$ $r = 5 \text{ cm}$ (Umkreisradius)

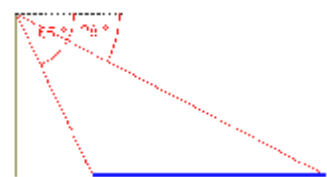
Vierecke: (7) $a = 8 \text{ cm}$ $b = 9 \text{ cm}$ $c = 2 \text{ cm}$ $\beta = 75^\circ$ $\gamma = 110^\circ$

(8) $b = 4 \text{ cm}$ $c = 3 \text{ cm}$ $d = 5 \text{ cm}$ $e = 6 \text{ cm}$ $\beta = 90^\circ$ ($e = [AC]$)

Aufgabe 2:

a) Von der Spitze eines 28 m hohen Turms werden für die Ufer eines vorbei fließenden Flusses die Tiefenwinkel 65° und 28° gemessen. Wie breit ist der Fluss?

b) Nimm an, statt 28° werden 45° gemessen. Wenn man jetzt noch weiß, dass der Turm 13 m vom Fluss entfernt steht, kann man die Flussbreite ohne Konstruktion angeben. Wie muss man vorgehen?

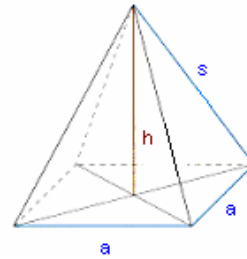


[Kommentar: Bei der Bearbeitung bietet sich die Diskussion über einen geeignet zu wählenden Maßstab an.]

Aufgabe 3:

Die Bodenfläche der Chephren-Pyramide ist ein Quadrat; die Spitze liegt genau über dessen Mittelpunkt. Von außen kann man die Kantenlänge a zu 215 m und die Seitenlänge s zu 209 m messen.

Ermittle die Höhe der Chephren-Pyramide durch eine maßstäbliche Konstruktion.

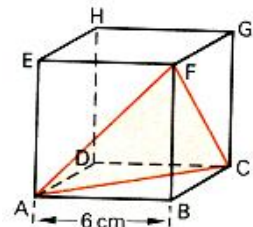


[Kommentar: Die Lösung lässt sich durch das Erstellen von Stäbchenmodellen unterstützen. Eine Bearbeitung im Rahmen von Intensivierungsstunden bietet sich an.]

Aufgabe 4:

Von einem Würfel der Kantenlänge 6 cm wird, wie in nebenstehender Figur dargestellt, das durch die Punkte A, B, C und F bestimmte Stück abgesägt.

- Konstruiere die Schnittfläche ACF in wahrer Größe. Welche besondere Gestalt hat dieses Dreieck?
- Bestimme den Flächeninhalt dieser Schnittfläche ACF. Benötigte Streckenlängen kannst du der Zeichnung aus a) entnehmen. Gib auch den gesamten Oberflächeninhalt des Restkörpers an.
- Betrachte nun das Dreieck ACF, wenn F längs der Linie [FH] in Richtung H wandert. Erläutere, wie sich der Flächeninhalt des Dreiecks dabei ändert. Wann ergibt sich der kleinstmögliche Flächeninhalt? Gib diesen minimalen Inhalt an.



[Kommentar: Die Lösung lässt sich durch das Erstellen von Stäbchenmodellen unterstützen. Bei Teilaufgabe c) wird im Sinne einer Vernetzung mit einem Term argumentiert. Eine Bearbeitung im Rahmen von Intensivierungsstunden bietet sich an.]